INSTITUTO UNIVERSITARIO
DE LA EMPRESA

COMBINATORIA Y DEPORTE: UN EJEMPLO DE TAREA MATEMÁTICA ANALIZADA UTILIZANDO TÉCNICAS ESTADÍSTICA Y RASCH

ANA TERESA ANTEQUERA GUERRA
MARIA CANDELARIA ESPINEL FEBLES

SERIE ESTUDIOS 2008/ 75

SANTA CRUZ DE TENERIFE, NOVIEMBRE DE 2008

UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

RESUMEN
La planificación de competiciones deportivas ha constituido la base para el desarrollo de una actividad planteada a alumnos de secundaria. Se da un nuevo enfoque a la utilización de la combinatoria y a los diagramas de árbol, enlazando los grafos de la matemática discreta con la organización de competiciones deportivas. Se observó que pocos alumnos relacionan la actividad con la combinatoria ya estudiada, sin embargo, todos entienden la situación planteada, y algunos desarrollan estrategias heurísticas debidas al contexto deportivo.
PALABRAS CLAVE: resolución de problemas, matemática discreta, estudiantes de secundaria, modelo de Rasch
ABSTRACT
The planning of sports competitions has been the basis for the development of an activity posed to high school students. It is a new approach to the use of combinatorial and tree diagrams, linking the graph of discrete mathematics with the organization of sports competitions. It was noted that few students relate the activity with the combinatorial and studied, however, everyone understands the situation, and some develop strategies heuristics due to the context of sports.
KEYWORDS: problem solving, discrete mathematics, secondary school students, Rasch analysis

COMBINATORIA Y DEPORTE: UN EJEMPLO DE TAREA MATEMÁTICA ANALIZADA UTILIZANDO TÉCNICAS ESTADÍSTICAS Y RASCH+

ANA TERESA ANTEQUERA*
MARÍA CANDELARIA ESPINEL FEBLES**

SERIE ESTUDIOS 2008/ 75

SANTA CRUZ DE TENERIFE, NOVIEMBRE 2008

+ Trabajo presentado al III Workshop de Modelos de Rasch en Administración de Empresas (Rasch Models on Business Administration) organizado por el IUDE de la Universidad de La Laguna. 10 de noviembre de 2008. Parte de esta investigación ha sido realizada en el marco del proyecto de Investigación SEJ2006-10290 (Ministerio de Ciencia y Tecnología, Madrid, programa del Plan Nacional de I+D+I).

* antegue@yahoo.es IES Luis Cobiella Cuevas
** mespinel@ull.es Área de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna

1. INTRODUCCIÓN

Las competiciones deportivas abren un abanico de posibilidades para trabajar conceptos matemáticos, que pueden resultar atrayentes para los estudiantes. Sobre esta base se ha desarrollado la actividad que se presenta en este trabajo. En concreto, las competiciones por el sistema de eliminatorias, donde los jugadores que pierden se retiran, ofrece la posibilidad de trabajar los diagramas o los grafos en árbol (Espinel, 1997; Sadovskii y Sadovskii, 1993). Mientras que las competiciones en campeonato de liga, sistema de "todos contra todos", se pueden modelizar mediante factorización de grafos o como un problema de coloración de grafos, y también como diseño de cuadrados latinos (Espinel, 1995; Ore, 1995).

Los conocimientos matemáticos necesarios para abordar estos problemas se pueden considerar como parte de la matemática discreta, supuesta ésta como el estudio de la disposición u ordenación de distintos objetos. La publicación de textos por el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (Kenney, 1991; Morrow y Lenney, 1998) y por la AMS (American Mathematical Society) (Rosentein, 1997) han tratado de promover la incorporación de la matemática discreta en el currículo de secundaria. En la actualidad, según algunos investigadores, la matemática discreta proporciona un nuevo punto de partida en la relación alumno profesor (Goldin, 2004). Esta permite plantear a los estudiantes un amplio rango de oportunidades para situaciones de investigación y descubrimiento en matemáticas, fuera de cualquier actividad rutinaria (DeBellis and Rosenstein, 2004).

Hasta el momento, en España, la matemática discreta no forma parte del currículo, los contenidos relacionados con ella están asociados a otros ya establecidos, o a la resolución de problemas. Algunas editoriales, como Anaya (Colera et al., 2007) o SM Vizmanos et al., 2005) ya incluyen en los libros de texto algunas pautas para trabajar en el aula la resolución de problemas, casi siempre siguiendo las fases de Polya (1945). Se suele tratar el problema como una herramienta para pensar matemáticamente (Schoenfeld, 1992) y con ello se espera formar individuos con capacidad autónoma para pensar, siendo críticos y reflexivos con las soluciones.

Como medio para conectar la resolución de problemas a la vida real se recurre al proceso de modelización matemática (Lesh y English, 2005). Ello requiere que los estudiantes se impliquen en algunas de las fases de las tareas de modelización (Stillman, et al., 2007), puesto que no es viable desarrollar todo el proceso en el aula. Las adaptaciones de algunas fases se pueden convertir en estrategias de aprendizaje de conceptos matemáticos, propiciando la integración de la matemática con otras áreas de conocimiento, el interés de la matemática de cara a su aplicabilidad, la creatividad en la formulación y resolución de problemas.

Las situaciones tomadas del mundo real han sido también el origen y el punto de partida para el desarrollo de los conceptos matemáticos que se han promovido desde el Instituto Freuthental (Holanda). Esto remite a los dos principios básicos de la Educación Matemática Realista (Doorman, 2007):

a) La matemática debe ser vista como una actividad humana

b) La matemática debe estar conectada con el mundo real.

El nuevo enfoque que se le ha dado a la educación, y en concreto en la educación matemática, centrada en el desarrollo de competencias individuales (BOE, 5.1.2007), hace necesario centrarse en introducir una forma de pensar que vaya más allá de la aplicación de los procedimientos para responder a ejercicios estándar (Niss, 2004). Este cambio facilita la introducción de actividades que desarrollan contenidos de la matemática discreta (toma de decisiones, repartos justos, elección social), en los que se utiliza una amplia gama de herramientas y habilidades matemáticas que se pueden adaptar al nivel de secundaria, siempre que se realice el proceso de transposición didáctica adecuado al nivel educativo (Brousseau, 1989).

El estudio que aquí se presenta forma parte de una investigación más amplia que tiene como objetivo el diseño de actividades relacionadas con la Teoría de Juegos para alumnos de secundaria, entendido este campo de las matemáticas como lo ha bautizado Robert Aumann (Premio Nóbel de Economía, 2005): *Teoría de la Decisión Interactiva*. En este sentido se trata de dar a conocer algunos modelos estratégicos que se puedan convertir en herramientas útiles para la resolución de conflictos en la vida cotidiana. Esta teoría proporciona un marco apropiado para llevar al aula situaciones reales y de actualidad, cuyo estudio implica el uso de diversos y variados conceptos matemáticos presentes dentro del currículo de Secundaria. Aunque, fundamentalmente, se trata de incorporar a la enseñanza de las matemáticas contenidos que fomenten el desarrollo de capacidades como: ser críticos, realizar razonamientos, resolver conflictos mediante la cooperación, de argumentar, aprender a negociar o saber ponerse en el lugar del otro (Antequera y Espinel, 2003).

En concreto, la actividad que se recoge en este trabajo parte de una situación pública de PISA 2003 (MEC, 2005), "El campeonato de Ping Pong", donde se presenta un sistema de competición en liga de “todos contra todos”. La actividad se amplía a una competición por sistema de eliminatorias de cuatro, seis y ocho jugadores (ver figura 1). Los alumnos de secundaria trabajaron combinatoria y diagramas de árbol en probabilidad y, por ello, se aprovecho la actividad para observar su conocimiento del tema. Hay que tener en cuenta que el árbol que conocen de probabilidad va creciendo de la raíz a las hojas, mientras que en la actividad aquí planteada se parte de las hojas (jugadores) y se llega a la raíz (campeón).

Las preguntas que guían la investigación de la actividad propuesta son:

- Verificar el proceso de análisis de datos realizado por los investigadores y su posible uso para mejorar el diseño de la actividad.
- Observar en los alumnos, la transferencia de conocimiento y el dominio funcional de la combinatoria y del modelo de árbol a una situación nueva.
- Identificar los procesos de razonamiento y las heurísticas utilizadas por los estudiantes.

2. METODOLOGÍA Y RESULTADOS

2.1. Descripción del estudio

En este trabajo se muestra un estudio que se realizó con 59 estudiantes de 15 a 17 años. De ellos, 20 son alumnos de último año de la secundaria obligatoria (15 – 16 años), y 29 alumnos de primer año de bachiller (16 – 17 años).

La actividad con la que se trabajó tiene dos partes. En la figura 1 se recoge la actividad que se les presentó a los estudiantes.

La primera parte, denominada “Campeonato de Ping Pong”, plantea un sistema de liga o de competición de “todos contra todos” en el que los alumnos tienen que rellenar una tabla de doble entrada con todos los juegos o enfrentamientos entre cuatro jugadores, que son las combinaciones de cuatro elementos tomados de dos en dos.

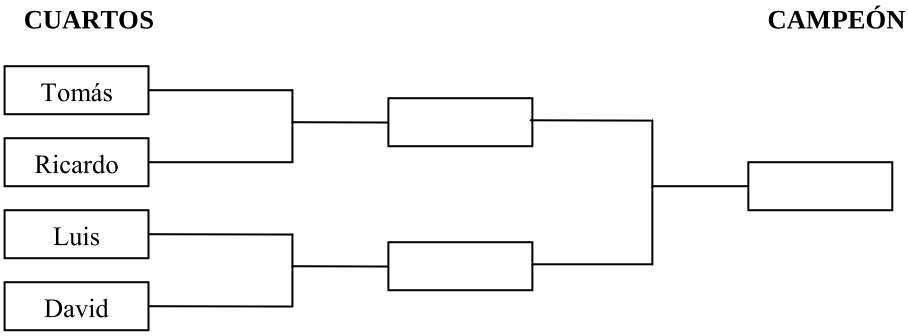
La segunda parte, que hemos llamado “Torneo para encontrar al campeón”, presenta otro sistema de planificación de competiciones basado en rondas eliminatorias. En las tres primeras cuestiones se presenta con cuatro jugadores, en las que los alumnos han de completar el cuadro, y dar el número total de partidos y el número de partidos jugados por el campeón. En las últimas cuestiones se pide que construyan el cuadro del torneo para seis y ocho jugadores, respectivamente. Así como indicar el número de partidos totales y los jugados por el campeón. De esta forma, en los tres primeros apartados se presentan una situación particular y concreta, que en los otros apartados los alumnos tienen que generalizar para un número mayor de jugadores.

Figura 1

CAMPEONATO DE PING – PONG
Tomás, Ricardo, Luis y David han formado un grupo de entrenamiento en un club de ping-pong. Cada jugador quiere jugar una vez contra cada uno de los otros jugadores. Han reservado dos mesas de ping-pong para estas partidas.
Completa la siguiente plantilla de partidas escribiendo los nombres de los jugadores que jugarán en cada partida.

	Mesa 1	*Mesa 2*
1ª Ronda	*Tomás-Ricardo*	*Luis-David*
2ª Ronda	…………-…………	…………-…………
3ª Ronda	…………-…………	…………-…………

TORNEO PARA ENCONTRAR AL CAMPEÓN
En el club se convocado un campeonato en el que van a participar los cuatro jugadores. El torneo constará de dos rondas eliminatorias, en las que el ganador pasa a la siguiente fase, y el perdedor es eliminado.
El siguiente cuadro muestra como se desarrolla el torneo:



a) *Rellena el cuadro como quieras dando un posible ganador.*
b) *¿Cuántos partidos se juegan en total en este torneo de cuatro jugadores?*
c) *¿En cuántos partidos ha tomado parte el jugador que resulta campeón?*
d) *Construye un cuadro análogo al anterior si participasen en el campeonato seis jugadores, y responde a las mismas cuestiones.*
e) *Haz lo mismo si en el campeonato participan ocho jugadores.*

2.2. Resultados y análisis de la información

Para la corrección de la actividad, se considera que consta de diez preguntas o ítems que se han codificado de la siguiente forma:

Campeonato de Ping Pong

PT = Campeonato de Ping Pong,

Torneo para encontrar al campeón

A = Completar el árbol de 4 jugadores, apartado a),

B = Número de partidos con 4 jugadores, apartado b)

C = Partidos campeón con 4 jugadores, apartado c)

D1, D2 y D3: corresponden a las preguntas a), b) y c) para 6 jugadores;

E1, E2 y E3: corresponden a las preguntas a), b) y c) para 8 jugadores,

Los resultados del análisis de los datos se presentan en cuatro apartados. En el primero se recogen los resultados relativos al éxito global de la actividad planteada. En el segundo y tercero se presentan los resultados de cada una de las cuestiones planteadas, con el objetivo de medir el nivel de dificultad y la similitud de cada una de las preguntas o ítems. Y en el cuarto se muestra, mediante la metodología Rasch, un análisis conjunto de alumnos e ítems.

2.2.1. Éxito global

Para medir el rendimiento de los alumnos se considera que la actividad consta de diez preguntas y cada una se considera bien o mal, por tanto la calificación oscila entre 0 y 10 puntos. Los resultados para la muestra de 49 estudiantes dan que la media de la puntuación global de la actividad planteada ha sido de 7.51 (σ = 2.10). Parece que resolver la actividad fue una tarea fácil para la mayoría de los alumnos, todos responden, al menos, tres preguntas de las diez cuestiones planteadas como se puede observar en el recorrido de la variable "CALIF" de las figura 2 y figura 3.

Figura 2

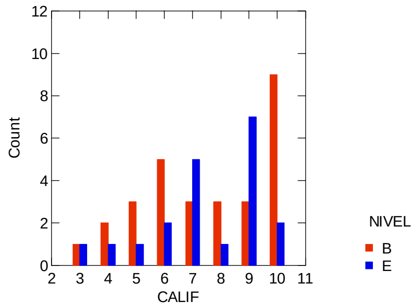
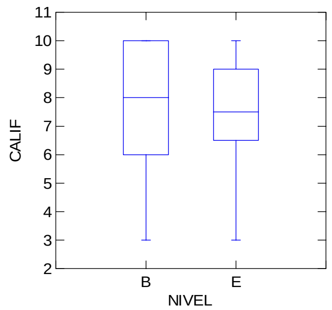


Figura 3



Por niveles, los 29 estudiantes de bachillerato han sacado una media de 7,52 (σ = 2,23) y los 20 alumnos de ESO 7.50 (σ = 1.96). Aunque la media es casi la misma en ambos grupos, se observa mejor la diferencia entre ellos con la mediana, que es más alta en el grupo de bachillerato, y que presenta calificaciones más dispersas, como se refleja en el gráfico de cajas al comparar los dos niveles estudiados (ver figura 3). Entre los alumnos de bachillerato, hay aproximadamente nueve, que son muy brillantes en matemáticas, lo que da lugar a que alcancen los diez puntos en la actividad, como se puede ver en la figura 2.

2.2.2. *Éxito de las cuestiones*

Para un análisis más pormenorizado se realiza la comparación de los resultados obtenidos por cada grupo de alumnos, en cada una de las cuestiones de la actividad. En la tabla 1 se muestra los porcentajes de alumnos que han resuelto correctamente cada una de las diez preguntas, puntuadas como bien o mal, teniendo en cuenta los dos grupos B (Bachillerato), E (ESO) y el Total.

Tabla 1

	4 jugadores				**6 jugadores**			**8 jugadores**		
	Campto	**Árbol**	**Juegos**	**Campeón**	**Árbol**	**Juegos**	**Campeón**	**Árbol**	**Juegos**	**Campeón**
Ítems	PT	A	B	C	D1	D2	D3	E1	E2	E3
B	76%	100%	83%	86%	62%	48%	21%	93%	59%	52%
E	50%	95%	95%	80%	70%	55%	0%	95%	60%	75%
Total	64%	98%	88%	84%	65%	51%	12%	94%	59%	61%

Se observa que en la mayoría de los ítems, el porcentaje de aciertos es alto, y bastante similar entre los dos niveles educativos, lo que es significativo si se tiene en cuenta que el grupo de la ESO hacía poco que había dado el tema de Combinatoria, y los de Bachillerato lo habían hecho el curso anterior.

En el primer ítem (PT) los alumnos, al rellenar la plantilla, se enfrentaron a un concepto que les era conocido: las combinaciones sin repetición de cuatro elementos tomados de dos en dos. Los resultados que se obtienen son aceptables en ESO y satisfactorios en Bachillerato. El principal error es que colocan a un jugador en los partidos de las dos mesas en la misma ronda. Además, es interesante resaltar que, aunque su respuesta sea incorrecta, los alumnos intentan seguir pautas de ordenación fijando un jugador y permutando el resto.

En el bloque formado por los ítems A, B y C, la mayoría de los alumnos contestan correctamente independiente del nivel, entienden el modelo de planificación que se les presenta, y son capaces de trabajar con él.

Los siguientes tres ítems D1, D2 y D3 corresponden a la cuestión d) con 6 jugadores. Se observa cómo muchos alumnos han sido capaces de interiorizar el modelo de árbol que se les presentó en la cuestión anterior, pero tienen dificultades para adaptarlo a la nueva situación, y no saben responder al número de partidos (D2), ni cuántos partidos ha jugado el campeón (D3). Sin embargo, hay que matizar este resultado puesto que un número significativo de los alumnos de Bachillerato (12 de 29) da una solución inesperada. Plantean la respuesta como un enfrentamiento de liga entre los tres jugadores que quedan después de la primera vuelta. Han asimilado el modelo pero han ido más allá de la simple reproducción, ya que no considera justo o lógico que un jugador juegue menos partidos que el resto, e intentan dar una respuesta acorde con su forma de pensar. Si bien, ningún alumno se da cuenta que “vencer a” no es una relación transitiva.

La última cuestión e), con sus ítems asociados E1, E2 y E3, plantea una situación con ocho jugadores y los resultados son similares en ambos niveles. Los alumnos no tienen dificultades en construir el modelo pedido, en parte debido a que se puede entender como la unión de dos cuadros de cuatro jugadores, similares al que se le dio como modelo de partida.

En resumen, el análisis de estas comparaciones muestra que la pregunta completar el árbol para cuatro jugadores fue la que tuvo un mayor porcentaje de éxito, seguida de la construcción de árbol para ocho jugadores. Organizar un sistema de eliminatorias para seis jugadores supone cierta dificultad y el esquema de árbol se complica para todos los alumnos.

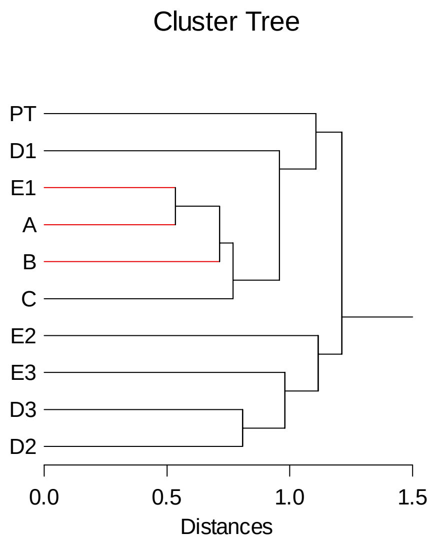
2.2.3. Semejanza de las cuestiones

Como el objetivo es conocer las características del proceso de resolución seguido por los alumnos, se decidió categorizar las respuestas de cada una de las preguntas de una forma más pormenorizada. En la escala de Likert de cuatro puntos se ha considerado que 3 puntos (regular) comprenden las soluciones incompletas y en el caso de la cuestión D1, corresponde a los alumnos que plantean una liga con tres jugadores. Las respuestas fueron codificadas utilizando las valoraciones:

1 = blanco, 2 = mal, 3 = regular y 4 = bien

Al aplicar una técnica de clasificación de agregación de salto mínimo (single) con la distancia euclídea se obtiene un árbol de parcial mínimo o dendrograma (ver figura 4). Se observan dos clúster, uno formado por los ítems “fáciles” (A, B, C, D1 y PT) y otro por grupo de ítems “difíciles” (D2, D3, E3, E2). Sin embargo, PT es el ítem que peor encaja en el primer clúster, algo lógico ya que corresponde a un modelo distinto al resto.

Figura 4



Hay que tener en cuenta que la dificultad de cada uno de los ítems es distinta, algo que se pone de manifiesto por la distancia entre ellos. Este hecho puede ser fundamental para el análisis del pensamiento formal en la resolución de problemas matemáticos.

2.2.4. Análisis conjunto

Para este análisis se recurre al modelo de Rasch que se sustenta en dos supuestos: 1. El atributo que se desea medir puede representarse en una única dimensión en la que se situarían conjuntamente las persona y los ítems, y 2. El nivel de la persona en el atributo y la dificultad del ítem determinan la probabilidad de que la respuesta sea correcta.

Como resultado de la aplicación del programa informático Winsteps (Linacre, 2007) a los datos, se obtiene el continuo lineal (ver figura 5) de los diez ítems de la actividad y de los 49 alumnos, numerados de 1 a 29 los de Bachillerato y de 30 a 49 los de ESO. De forma que los ítems más próximos al extremo superior son los más fáciles (“freque” en el gráfico), representan a las preguntas que más alumnos han contestado correctamente, mientras que los más próximos al otro extremo inferior serían los menos contestados y, por lo tanto, los más difíciles para los alumnos (ítem “rare”). Desde el punto de vista de los sujetos, en el extremo superior (“more”) se situarían quienes han tenido un mayor número de aciertos, y en el extremo inferior (“less”) están identificados los alumnos que menos preguntas correctas han respondido.

Figura 5: Escalamiento conjunto con 49 alumnos y 10 preguntas

```
LOCALIZACIÓN                 ALUMNOSS -MAP- Preguntas
                                 <more>||<frequ>
 3                    16  23  24  27  ++
   04  05  08  18  26  29  32  36  48  ||
                                       ||
                                      S||
                              30  39  ||
                                       ||T
                  06  07  31  41  43  ||  A
 2                                     ++
                          03  21  46  ||
                              13  33  ||
                                       ||
              01  09  37  38  42  45 M||
                                  34  ||  E1
                                  49  ||S
 1                                     ++
                                  47  ||
                          19  25  35  ||  B
                                  10  ||
                                      S||  PT
                          15  20  22  ||  C
                  11  12  14  17  44  ||
 0                                     ++M
                                  02  ||  D1
                                  28  ||
                                  40  ||
                                      T||
                                       ||
                                       ||  E2     E3
-1                                     ++
                                       ||S D2
                                       ||
                                       ||
                                       ||
                                       ||  D3
                                       ||
-2                                     ++
                                 <less>||<rare
```

En la parte derecha del gráfico destaca la presencia de dos grandes grupos de ítems. Se observa que hay cinco ítems (A, E1, B, PT y C) por encima de la media (M) y que son los fáciles para estos alumnos, y cuatro (D3, D2, E3, E2) difíciles y uno (D1) en la posición esperada. En total hay cinco ítems que están por debajo de la media. En la parte izquierda del gráfico, destaca la distribución de los alumnos situados alrededor de la media, siendo el caso 40, el peor alumno, y los mejores, un grupo de cuatro alumnos (casos 16, 23, 24, 27). La alineación de los alumnos y las preguntas es muy dispersa, prevaleciendo un número importante de alumnos con habilidad por encima de las dificultades de las preguntas.

En suma, el estudio de los datos muestra que todos los alumnos completan la plantilla del campeonato y rellenan árbol para cuatro jugadores. Cometen errores al completar la tabla del campeonato, debidos a que repiten el nombre de uno de los jugadores en las dos mesas, en la segunda o en la tercera ronda. Con el grupo de alumnos de la ESO, en el tema de combinatoria, se había trabajado el seguir una pauta, pero la mitad de ellos no revisan la tabla para comprobar que la respuesta no contiene errores del tipo repetir un jugador en una ronda. Falla pues un conocimiento funcional de la combinatoria. La dificultad mayor la presenta el torneo con seis jugadores. Los alumnos de altas capacidades buscan una situación justa y diseñan una heurística. Todos los alumnos menos tres construyen el árbol para ocho jugadores, pero tienen dificultad para contestar a la pregunta sobre el número de partidos que juega el campeón.

3. CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en este trabajo han sido satisfactorios, especialmente al constatar el grado de implicación de los alumnos en la actividad, ya que todos han tratado de responder a las cuestiones planteadas. Las preguntas más difíciles corresponden a tareas que requieren la asimilación de un modelo sobre el que integrar los cálculos.

Sólo la mitad de los alumnos de ESO resuelven correctamente el problema de campeonato. Los mejores resultados en esta pregunta por alumnos de bachillerato se deben a que entre ellos hay un grupo de un alto pensamiento formal, y buen rendimiento en matemáticas, para el resto, su comportamiento es el mismo que los de nivel ESO, y sencillamente recurren al ensayo y error, como se observa en sus producciones escritas. Posiblemente, estrategias de conteo como las que se enseñan en la combinatoria necesitan un uso continuado y deben ser retomadas como estrategias a seguir en los problemas donde se estudien disposiciones u ordenaciones de objetos. A pesar de los buenos resultados conseguidos, somos conscientes que los alumnos, finalizado los contenidos de combinatoria, en su mayoría no la utilizan para resolver la actividad relacionada con las competiciones deportivas.

Puede que los buenos resultados para los ítems con enunciado de cuatro y ocho jugadores se deban a que los alumnos conocen los sistemas de eliminatorias con octavos, cuartos y semifinales utilizados, por ejemplo, en la Euro Copa de fútbol, o en la Copa Davis de tenis. Si bien, este es uno de los objetivos, el que a través del proceso de modelización se preste atención al mundo externo y al matemático y que los resultados sean matemáticamente correctos y razonables en el contexto del mundo real.

En cuanto a la adecuación de la prueba al nivel de competencia, los datos indican que la prueba es demasiado fácil para la muestra analizada, especialmente para los alumnos de bachillerato. Se observa que faltan preguntas de alta dificultad que serían más apropiadas para evaluar adecuadamente a los sujetos con altas competencias. Se pretende añadir algún ítem sobre generalización y búsqueda de patrones y la fórmula para responder a las preguntas.

El análisis mediante el modelo de Rasch admite identificar la dificultad media de los ítems. El escalamiento conjunto permite interpretaciones de sumo interés. En nuestro caso para cambiar o modificar algunas de las preguntas. En esta actividad, considerada como una forma de indagar acerca de la competencia en la comprensión de conceptos matemáticos (diagrama de árbol, en este caso) y en la resolución de problemas se puede afirmar que el rendimiento de esta muestra de alumnos es elevado, puesto que la mayor parte de los alumnos tienen puntuaciones superiores a 0, como se observa en la escala de localización de la dificultad promedio de los ítem, sólo tres alumnos han quedado por debajo, uno de la ESO y dos de Bachillerato. Este dato significa que la mayoría de los alumnos tiene una alta probabilidad de resolver correctamente todos los ítems. Esto se explica porque los alumnos de la ESO conocen los diagramas de árbol, pues acaban de trabajar con ellos en combinatoria y probabilidad, y el grupo de bachillerato tiene la particularidad de ser muy bueno en matemáticas, ya que aprueban siempre esta asignatura unos 20 alumnos de los 29.

Creemos que las situaciones cotidianas como la que se ha presentado en esta actividad, siempre suponen un marco atrayente para introducir y desarrollar nuevos contenidos con los alumnos. En concreto, este es un escenario bastante familiar para ellos, pues aparece continuamente en los medios de comunicación, y en la organización de competiciones deportivas con gran presencia en la sociedad actual. Si bien se trata de problemas matemáticamente difíciles (Knuth, 1987; Sadovskii y Sadovskii, 1993) pueden ser una fuente para trabajar la matemática discreta y que el alumno capte el rol que juegan las matemáticas en nuestra sociedad, incluidos los deportes.

Nota: Parte de esta investigación ha sido realizada en el marco del proyecto de Investigación SEJ2006-10290 (Ministerio de Ciencia y Tecnología, Madrid, programa del Plan Nacional de I+D+I).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTEQUERA, A. T., ESPINEL, M. C. (2003): “Decisiones estratégicas y de cooperación desde las Matemáticas”. *Números*. Revista de la S.C.P.M. Isaac Newton, 53, 15-27.

BROUSSEAU, K. (1996): “Fundamentos de Didáctica de la Matemática”. Publicaciones del Seminario Matemático García Galdano. Universidad de Zaragoza.

COLERA, J., GARCIA, R., GAZTELU, I., OLIVEIRA, J. y MARTIINEZ, M.M. (2007): *Matemáticas, 4*. Opción A. Madrid: Anaya

DeBELLIS, V.A., ROSENSTEIN, J. (2004): “Discrete Mathematics in Primary and Secondary Schools in the United States”. *ZDM*, 36 (2) 46-55.

DOORMAN, M.; DRIJVERS, P.; DEKKER, T.; HEUVEL-PANHUIZEN, M. van den; LANGE, J. de; WIJERS, M. (2007): “Problem solving as a challenge for mathematics education in The Netherlands”. *ZDM Mathematics Education,* 39, 405-418.

ESPINEL, M.C. (1995): “Algunas cuestiones de conteo en un sistema de liga”. *Aula*, 44, 65-69.

ESPINEL, M.C. (1997): “Presencia de la matemática discreta en las competiciones deportivas”. *Boletín Sociedad “Puig Adams”, 47*, 47-57.

GOLDIN, G. A. (2004): “Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics”. *ZDM*, 36 (2), 56-60.

KENNEY, M. J., HIRSCH, C.R. (Eds) (1991): *Discrete Mathematics Across the Curriculum, K-12*. Inc, Reston, Virginia: NCTM.

KNUTH, D.E. (1987): *El arte de programar ordenadores. Clasificación y búsqueda*. Barcelona: Reverté.

LESH, R.; ENGLISH, L. D. (2005): “Trend in the Evolution of Models and Modelling Perspectives an Mathematical Learning and Problem Solving”. *ZDM,* 37 (6), 487-489.

LINACRE, J. M. (2007): *Realiability and Separations. A User´s Guide to Winsteps/ Ministep Rasch – Model Computer Programs* Chicago: Winsteps. Com www.winsteps.com

MEC (2005): *PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas.* Inecse. Madrid.

MORROW, L. J., LENNEY, M. J. (1998): *The Teaching and Learnign of Algorithms in School Mathematics*. Yearbook Reston: NCTM.

NISS, M. (2004): *Mathematical competencias and the learning of mathematics: the Danish KOM Project.*

OCDE (2003): *Manual de Análisis de datos PISA 2003: usuarios de SPSS.* On line: www.ince.mec.es/pub/pisamanualdatos.pdf

OCDE (2004): *Learning for Tomorrow's World: First results from PISA 2003.* OCDE. París.

OCDE (2006): *PISA 2006. Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura.* Santillana Educación. España.

ORE, O. (1995): *Grafos y sus aplicaciones*. La tortuga de Aquiles 6. Madrid: EULER.

PARKS, H., MUSSER, G., BURTON, R. SIEBLER, W. (2000): *Mathematics in Life, Society, & the World*. New Jersey: Prentice Hall.

POLYA, G. (1945): *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

SADOVSKII, L. E.; SADOVSKII, A. L. (1993): *Mathematics and Sports*. Massachusetts: American Mathematical Society. Mathematical World, 3. http://www.uberum.com/?q=node/246

SCHOENFELD, A. H. (1992): "Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, sense-making in mathematics". In: D. Grouws (Ed.) *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.334-370). New York: Macmillan.

STILLMAN, G., BROWN, P., GALBRAITH, P. and EDWARD, I. (2007): "A Framework for Success in Implementing Mathematical Modelling in the Secondary Classroom". In: Watson, J.; Beswick, K. (Eds) *Proceeding of the 30th annual conference of the Mathematics Education* Research Group of Australasia. Vol 2 pp 688-697. Australia.

ROSENTEIN, J. G., FRANZBLAU, D. S., ROBERT, F. S. (1997) (Eds): *Discrete Mathematics in the Schools*, DIMACS Series in Discrete Mathematics Computer Science, Volume 36, Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). http://dimacs.rutgers.edu/Volumes/Vol36.html

VIZMANOS, J.R., ANZOLA, M., ALCALDE, F. y PERALTA, J. (2005): *Matemáticas 4*, opción A. Madrid: SM.